

数学(文科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共150分.考试时间120分钟.
2. 请将各题答案填写在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容:复数,集合与常用逻辑用语,函数与导数,三角与向量,数列,不等式.

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x+1 < 2\}$, $B = \{x | x^2 < 9\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(1, 3)$ B. $(-\infty, 1)$
C. $(-3, 3)$ D. $(-3, 1)$
2. 复数 $z = (5+2i) - (2-i)$, 则 $|z| =$
A. 5 B. $3\sqrt{2}$ C. 18 D. 25
3. 在公比为2的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 前 n 项和为 S_n , 且 $S_7 - 2S_5 = 1$, 则 $a_1 + a_5 =$
A. 5 B. 9 C. 17 D. 33
4. 已知向量 $m = (\lambda+1, 1)$, $n = (\lambda+2, 2)$, 若 $(2m+n) \parallel (m-2n)$, 则 $\lambda =$
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
5. 若 $4^m = 3^n = k$, 且 $2m+n = mn \neq 0$, 则 $k =$
A. 18 B. 26 C. 36 D. 42
6. “ $a < -1$ ”是“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, a \sin x_0 + 1 < 0$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 函数 $f(x) = x^3 + \lg x - 18$ 的零点所在的区间为
A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$
8. 已知函数 $f(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x) \cos(\frac{\pi}{6} + x) - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期和最大值分别为
A. $\pi, \frac{1}{4}$ B. $\pi, \frac{1}{2}$ C. $2\pi, \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ D. $2\pi, \frac{\sqrt{3}}{2}$
9. 已知 $1 < a < 2$, 实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 1, \\ y \leq 1, \\ \frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{a} \leq 1, \end{cases}$ 且 $z = \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$ 的最大值为 $\frac{5}{8}$, 则 $a =$
A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{9}{8}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

10. 已知函数 $f(x) = |\log_2 x|$, 当 $0 < m < n$ 时, $f(m) = f(n)$. 若 $f(x)$ 在 $[m^2, n]$ 上的最大值为2,

则 $\frac{n}{m} =$

A. 2

B. $\frac{5}{2}$

C. 3

D. 4

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $(-1)^n (a_n - a_{n+2}) = 2 - 2 \cdot (-1)^n$, 则 S_{2019} 的值为

A. $2018 \times 1011 - 1$ B. 2019×1010 C. $2019 \times 1011 - 1$ D. 2018×1010

12. 已知函数 $f(x) = (x^2 - a) \ln x$, 曲线 $y = f(x)$ 上存在两个不同点, 使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直, 则实数 a 的取值范围是

A. $(-\frac{1}{e^2}, 0)$ B. $(-1, 0)$ C. $(-\frac{1}{e^2}, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

第Ⅱ卷

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. 函数 $f(x) = x + \sin x (1 - \cos x)$ 的图象在点 (π, π) 处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 α 为第二象限角, 则 $\cos \alpha \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sin^2 \alpha \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2 \alpha}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 a, b, c 成等比数列, 且 $b = a \cos C + c \sin A$,

则 $\frac{b \sin B}{c} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 正数 a, b 满足 $a > b, ab = 1$, 则 $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2 + S_2 = -5, S_3 = -15$.

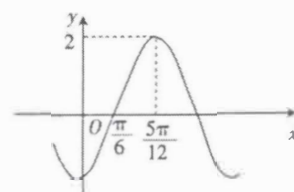
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$.

18. (12分)

已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.

- (1) 求 $f(0)$ 的值;
- (2) 求 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值;
- (3) 不画图, 说明函数 $y = f(x)$ 的图象可由 $y = \sin x$ 的图象经过怎样变化得到.

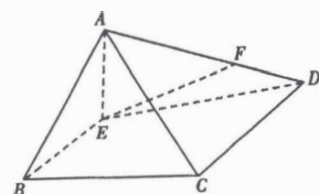


19. (12分)

如图所示, 四棱锥 $A-BCDE$ 中, $BE \parallel$

$CD, BE \perp$ 平面 $ABC, CD = \frac{3}{2}BE$, 点 F 在线段 AD 上.

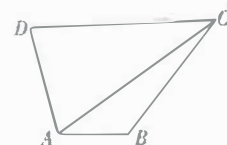
- (1) 若 $AF = 2FD$, 求证: $EF \parallel$ 平面 ABC ;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $CD = AC = 3$, 求四棱锥 $A-BCDE$ 的体积.



20. (12分)

如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{3} - 1, BC = \sqrt{3} + 1, CA = 3$, 且角 D 与角 B 互补, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}$.

- (1) 求 $\triangle ACD$ 的面积;
- (2) 求 $\triangle ACD$ 的周长.



21. (12分)

设 $a \in \mathbf{R}$, 命题 p : 函数 $y = \log_a(x^3 - ax)$ ($a > 0, a \neq 1$) 在区间 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 内单调递增; q : 函数

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$ 仅在 $x = 0$ 处有极值.

- (1) 若命题 q 是真命题, 求 a 的取值范围;
- (2) 若命题 $p \vee (\neg q)$ 是真命题, 求 a 的取值范围.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax$ ($a \in \mathbf{R}$).

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x) < 0$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上有解, 求 a 的取值范围.

数学参考答案(文科)

1. D 【解析】本题考查集合的交集运算,考查运算求解能力.

因为 $A = \{x | x+1 < 2\} = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | x^2 < 9\} = \{x | -3 < x < 3\}$, 所以 $A \cap B = \{x | -3 < x < 1\}$.

2. B 【解析】本题考查复数的运算和模,考查运算求解能力.

$$z = 3 + 3i, |z| = 3\sqrt{2}.$$

3. C 【解析】本题考查等比数列的通项公式,考查运算求解能力.

由 $S_{n+1} = a_1 + qS_n$, 得 $S_7 - 2S_6 = a_1 = 1$, 所以 $a_5 = 2^4 = 16$, 所以 $a_1 + a_5 = 17$.

4. B 【解析】本题考查平面向量的坐标运算,考查运算求解能力.

因为 $2m+n = (3\lambda+4, 4)$, $m-2n = (-\lambda-3, -3)$, 且 $(2m+n) \parallel (m-2n)$,

所以 $(-3) \cdot (3\lambda+4) - 4 \cdot (-\lambda-3) = 0$, $\lambda = 0$.

5. C 【解析】本题考查对数的运算,考查运算求解能力.

由题意得 $m = \log_3 k$, $n = \log_3 k$. 又由 $2m+n = mn$, 得 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1$,

所以 $\log_3 4 + 2\log_3 3 = 1$, 即 $\log_3 36 = 1$, 解得 $k = 36$.

6. A 【解析】本题考查充分条件、必要条件和三角函数,考查数形结合和运算求解能力.

必要性: 设 $f(x) = a \sin x + 1$, 当 $a > 0$ 时, $f(x) \in [1-a, 1+a]$, 所以 $1-a < 0$, 即 $a > 1$;

当 $a < 0$ 时, $f(x) \in [1+a, 1-a]$, 所以 $1+a < 0$, 即 $a < -1$. 故 $a > 1$ 或 $a < -1$.

充分性: 取 $x_0 = \frac{\pi}{2}$, 当 $a < -1$ 时, $a \sin x_0 + 1 < 0$ 成立.

7. C 【解析】本题考查函数的零点存在性定理,考查推理论证能力.

因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(2) = 2^3 + \lg 2 - 18 = \lg 2 - 10 < 0$, $f(3) = 3^3 + \lg 3 - 18 = 9 + \lg 3 > 0$, 所以函数 $f(x)$ 的零点所在的区间为 $(2, 3)$.

8. B 【解析】本题考查三角函数的图象及恒等变换,考查运算求解能力.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin$$

9. D 【解析】本题考查线性规划问题,考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

由可行域可知, z 在点 $(1, a-1)$ 处取得最大值, 所以 $\frac{1}{2} + \frac{a-1}{4} = \frac{5}{8}$, 解得 $a = \frac{5}{2}$.

10. D 【解析】本题考查函数的图象与最值,考查推理论证能力.

因为 $f(x) = |\log_2 x|$, 且当 $0 < m < n$ 时, $f(m) = f(n)$, 所以 $mn = 1$, 且 $n > 1$, $0 < m < 1$. 所以 $m^2 < m$, 则 $f(x)$ 在 $[m^2, n]$ 上的最大值为 $f(m^2) = |\log_2 m^2|$

11. C 【解析】本题考查等差数列的定义以及前 n 项和,考查运算求解能力,分类讨论的数学思想.

当 n 为奇数时, $a_{n-2} - a_n = 4$, 数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1, 公差为 4 的等差数列;

当 n 为偶数时, $a_{n+2} - a_n = 0$. 数列 $\{a_{2n}\}$ 是首项为 2, 公差为 0 的等差数列.

所以 $S_{2019} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2019})$

$1011 - 1$.

12. A 【解析】本题考查导数的几何意义,考查化归与转化、函数与方程和数形结合的数学思想以及运算求解能力.

因为曲线 $y = f(x)$ 上存在两个不同点, 使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直, 所以 $f'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2 - a}{x} = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的解, 即 $a = 2x^2 \ln x + x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的解. 设 $g(x) =$

$2x^2 \ln x + x^2$, $g'(x) = 4x \ln x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x = 4x(\ln x + 1)$, 所以当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 且当 $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 时, $g(x) < 0$, 又 $g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e^2}$, 所以当 $a \in (-\frac{1}{e^2}, 0)$ 时, $a = 2x^2 \ln x + x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的解.

13. $x + y - 2\pi = 0$ 【解析】本题考查导数的几何意义, 考查数形结合的数学思想.

$f'(x) = 1 - \cos 2x + \cos x$, 所以 $f'(\pi) = -1$, 切线方程为 $y - \pi = -(x - \pi)$, 即 $x + y - 2\pi = 0$.

14. -1 【解析】本题考查三角恒等变换的知识, 考查运算求解能力.

因为 α 为第二象限角, 所以 $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$,

$$\text{所以 } \cos \alpha \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} = \cos \alpha \sqrt{\frac{(1 + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} = \cos \alpha \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|} = -1 - \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (-1 - \sin \alpha)^2} = \sqrt{1 - (1 + 2\sin \alpha + \sin^2 \alpha)} = \sqrt{-2\sin \alpha - \sin^2 \alpha}$$

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】本题考查正弦定理以及三角恒等变换, 考查运算求解能力.

由正弦定理可知, $\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \sin C \cos A$, 易得 $\cos C = A = c \sin A$, $A = \frac{\pi}{4}$. 又 a, b, c 成等

$$\text{比数列, 所以 } \frac{b}{c} = \frac{a}{b}, \frac{b \sin B}{c} = \frac{a \sin B}{b} = \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

16. 2 【解析】本题考查基本不等式的应用, 考查推理论证能力和运算求解能力.

$\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + b^2 - ab}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 1}{a - b} = a - b + \frac{1}{a - b}$ 令 $t = a - b > 0$, 则 $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} = t + \frac{1}{t} \geq 2$, 当且仅当 $t = 1$ 时取等号.

17. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$

$$S_5 = 5a_1 + 10d = -15, \text{ 即 } a_1 + 2d = -3. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } a_1 = -1, d = -1, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_n = -1 - (n - 1) = -n. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } a_n = -n, \text{ 所以 } \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 根据图象可以得到 $A = 2$, $T = 4(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6}) = \pi$,

$$\text{所以 } \omega = 2, f(x) = 2\sin(2x + \varphi). \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{又 } f(\frac{5\pi}{12}) = 2, \text{ 所以 } \sin(\frac{5\pi}{6} + \varphi) = 1.$$

$$\text{所以 } \frac{5\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 即 } \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}). \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$f(0) = 2\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \text{ 得 } -\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

所以 $-1 \leq \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \leq \frac{1}{2}$.

∴ 7 分

所以 $-2 \leq f(x) \leq 1$.

故当 $x = -\frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -2 ; 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 1 .

9 分

(3) 先将 $y = \sin x$ 的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变), 得到 $y = 2\sin x$ 的图象;

∴ 10 分

再将 $y = 2\sin x$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到 $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$ 的图象;

11 分

最后将 $y = 2\sin$

2

图象. 12 分

注: 其他解法相应给分.

19. ● 解析 (1) 证明: 取线段 AC 上靠近 C 的三等分点 G , 连接 BG, GF .

..... 1 分

因为 $\frac{AG}{AC} = \frac{AF}{AD} = \frac{2}{3}$, 则 $GF = \frac{2}{3}CD = BE$.

(2 分)

∴ 3 分

而 $GF \parallel CD, BE \parallel CD$, 故 $GF \parallel BE$.

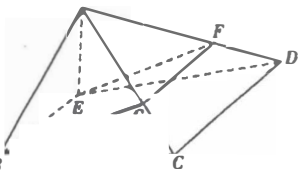
(3 分)

故四边形 $BGFE$ 为平行四边形, 故 $EF \parallel BG$.

(4 分)

因为 $EF \not\subset$ 平面 $ABC, BG \subset$ 平面 ABC , 故 $EF \parallel$ 平面 ABC .

(6 分)



(2) 因为 $BE \perp$ 平面 $ABC, BE \subset$ 平面 $BCDE$, 所以平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$. (8 分)
所以四棱锥 $A-BCDE$ 的高即为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高. (9 分)

易求得 BC 边上的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

故四棱锥 $A-BCDE$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (2 + 3) \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$. (12 分)

● 方法总结 证明直线与平面平行的关键是在平面内找到一条与已知直线平行的直线, 常根据几何体的特征, 合理利用中位线、线面平行的性质, 或者构造平行四边形寻求一组对边平行; 另外也可以利用面面平行的性质进行证明.

20. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$ 4 ,

所以 $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$

..... 2 分

因为角 D 与角 B 互补.

所以 $\sin \angle ADC = \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}, \cos \angle ADC = -\cos \angle ABC = \frac{1}{4}$ 3 分

又 $\vec{AD} \cdot \vec{CD} = \frac{3}{2}$,

所以 $\vec{AD} \cdot \vec{CD} = |\vec{AD}| \cdot |\vec{CD}| \cdot \cos \angle ADC = \frac{3}{2}$, 即 $|\vec{AD}| \cdot |\vec{CD}| = 6$, 5 分

所以 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} |\vec{AD}| \cdot |\vec{CD}| \cdot \sin \angle ADC = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ 6 分

(2) 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC$,

所以 $AD^2 + CD^2 = AC^2 + 2AD \cdot CD \cos \angle ADC = 12$, 8 分

所以 $AD + CD = 2\sqrt{6}$ 10 分

所以 $\triangle ACD$ 的周长为 $AD + CD + AC = 2\sqrt{6} + 3$ 12 分

21. 解: (1) 由题意知, $f'(x) = x(x^2 + 4ax + 1)$, 显然 $x=0$ 不是方程 $x^2 + 4ax + 1 = 0$ 的根.
 为使 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有极值, 必须 $x^2 + 4ax + 1 \geq 0$ 恒成立, 即 $\Delta = 4(4a^2 - 1) \leq 0$,
 解不等式, 得 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$. 这时 $f(0) = 1$ 是唯一极值, 3 分
 因此满足条件的 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 5 分
 (2) 当 p 是真命题时, 记 $g(x) = x^3 - ax$, 则 $g'(x) = 3x^2 - a$.
 当 $a > 1$ 时, 要使得 $y = \log_a(x^3 - ax)$ 是增函数, 则需有 $g'(x) \geq 0$ 对 $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ 恒成立,
 所以 $a \leq 0$, 与 $a > 1$ 矛盾; 7 分
 当 $0 < a < 1$ 时, 要使得 $y = \log_a(x^3 - ax)$ 是增函数, 则需有 $g'(x) \leq 0$ 对 $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ 恒成立,
 所以 $a \geq 3 \cdot (-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$, 所以 $\frac{3}{4} \leq a < 1$.
 记当 p 是真命题时 a 的取值集合为 A , 则 $A = \{a \mid \frac{3}{4} \leq a < 1\}$; 9 分
 记当 $\neg q$ 是真命题时 a 的取值集合为 B , 则 $B = \{a \mid a < -\frac{1}{2} \text{ 或 } a > \frac{1}{2}\}$ 10 分
 因为 $p \vee (\neg q)$ 是真命题.
 所以 a 的取值范围是 $A \cup B = \{a \mid a < -\frac{1}{2} \text{ 或 } a > \frac{1}{2}\}$ 12 分
 22. 解: (1) 因为 $f(x) = e^x - ax$, 所以 $f'(x) = e^x - a$ 2 分
 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; 3 分
 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln a$, $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减. 5 分
 (2) 由(1)可知, 当 $a \leq 0$ 时, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 因为 $f(x) < 0$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上有解, 所以 $f(-1) = \frac{1}{e} + a < 0$, 则 $a < -\frac{1}{e}$; 7 分
 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减. 8 分
 ① 当 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时, $\ln a \leq -1$, $f(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增. 所以 $f(-1) = \frac{1}{e} + a < 0$, 则 $a < -\frac{1}{e}$, 不符合题意; 9 分
 ② 当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $\ln a > -1$, $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, \ln a)$ 上单调递减.
 所以 $f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a \ln a < 0$, 则 $a > e$ 11 分
 综上, $a \in (-\infty, -\frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$ 12 分