

2019~2020 年度河南省高三上学年期末考试 数学参考答案(文科)

1. B 因为 $B = \{x | x > 2\}$, 所以 $A \cap B = \{3, 6\}$.

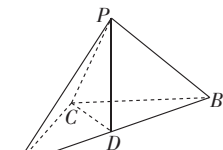
2. C 因为公差 $d = 3 - 1 = 2$, 所以该数列的前 10 项和为 $10 \times 1 + \frac{10 \times 9}{2} \times 2 = 100$.

3. B 因为 $\frac{z}{1+i} = \frac{i}{2-i}$, 所以 $z = \frac{i(1+i)}{2-i} = \frac{(-1+i)(2+i)}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$, 则 $z = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$.

4. B M 与 P 是既不是对立也不是互斥事件, M 与 N 是互斥事件, N 与 P 是互斥事件.

5. A 由题意知, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}x (m > 0)$, $3x + 2y = 0$ 可化为 $y = -\frac{3}{2}x$, 则 $\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{3}{2}$, 解得 $m = \frac{4}{9}$.

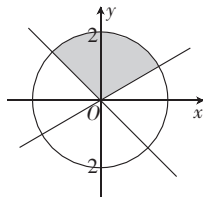
6. C 根据三视图, 可得三棱锥 $P-ABC$ 的直观图如图所示, 其中 D 为 AB 的中点, $PD \perp$ 底面 ABC . 所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$, $|PA| = |PB| = |PC| = \sqrt{6}$, PA, PB, PC 不可能两两垂直, 三棱锥 $P-ABC$ 的侧面积为 $2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$.



7. D 设 $BC = 6$, 则 $DE = 2$, $AD = AE = \sqrt{10}$, $\cos \angle DAE = \frac{10 + 10 - 4}{2 \times 10} = \frac{4}{5}$, 所以 $\frac{AF}{AD} = \frac{AF}{AE} = \frac{4}{5}$, 所以 $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AD}$. 因为 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{5} \times (\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}) = \frac{8}{15} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{15} \overrightarrow{AC}$.

8. A 因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 排除 C 和 D. 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$, $f'(x) = \frac{x^3 + 2\ln x - 1}{x^3}$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$. 所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 排除 B, 故选 A.

9. B 作出 Ω 中在圆 C 内部的区域, 如图所示, 因为直线 $x + y = 0$, $x - \sqrt{3}y = 0$ 的倾斜角分别为 $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, 所以由图可得 P 取自 Ω 的概率为 $\frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}{2\pi} = \frac{7}{24}$.



10. B 因为 $BC \perp CD$, 所以 $BD = \sqrt{7}$, 又 $AB \perp$ 底面 BCD , 所以球 O 的球心为侧棱 AD 的中点, 从而球 O 的直径为 $\sqrt{10}$. 利用张衡的结论可得 $\frac{\pi^2}{16} = \frac{5}{8}$, 则 $\pi = \sqrt{10}$, 所以球 O 的表面积为 $4\pi(\frac{\sqrt{10}}{2})^2 = 10\pi = 10\sqrt{10}$.

11. A 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) \in (3, 4]$, 此时, $f(x)$ 无零点;

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2^x + \log_3 x^2 - 9 = 2^x + \log_3 x - 9$ 为增函数, 且 $f(3) = 0$.

令 $f(f(x)) = 0$, 得 $f(x) = 2^x + \log_3 x - 9 = 3$, 因为 $f(3) = 0 < 3$, $f(\frac{7}{2}) = 8\sqrt{2} + \log_3 \frac{7}{2} - 9 > 3$,

所以函数 $y = f(f(x))$ 的零点所在区间为 $(3, \frac{7}{2})$.

12. D 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} y = k(x-1), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2} = 2 + \frac{4}{k^2}$,

因为直线 $y = k(x-1)$ 经过 C 的焦点, 所以 $|AB| = x_1 + x_2 + p = 4 + \frac{4}{k^2}$. 同理可得 $|MN| = 8 + \frac{2}{k^2}$, 所以 $\lambda = 4 - 16 = -12$.

- 13.9 ∵ $f(x)$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在定义域上单调递增, ∴ $f(x)_{\min} = f(1) = 9$.
14. $x = \frac{k\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$ 令 $4x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{k\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$.
15. $3 + 2\sqrt{2}$ 因为 CC_1, DD_1 都与底面 $ABCD$ 垂直, 所以 $\alpha = \angle CBC_1, \beta = \angle DBD_1, \tan \alpha = 1, \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 所以
- $$\tan(\alpha + \beta) = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 3 + 2\sqrt{2}.$$
16. ①③④ ∵ $y' = 3x^2$, ∴ 曲线 $y = x^3$ 在点 (a_n, a_n^3) 处的切线方程为 $y - a_n^3 = 3a_n^2(x - a_n)$,
 则 $-a_n^3 = 3a_n^2(a_{n+1} - a_n)$. ∵ $a_n \neq 0$, ∴ $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$, 则 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列,
 从而 $a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{4}{9}, \sum_{i=1}^4 a_i = \frac{1 - (\frac{2}{3})^4}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{65}{27}$. 故所有正确结论的编号是①③④.
17. 解: (1) 因为答对题数的平均数约为 $(1 \times 0.025 + 3 \times 0.025 + 5 \times 0.0375 + 7 \times 0.125 + 9 \times 0.1875 + 11 \times 0.1) \times 2 = 7.9$ 4 分
 所以这 40 人的成绩的平均分约为 $7.9 \times 10 = 79$ 6 分
 (2) 答对题数在 $[2, 4)$ 内的学生有 $0.025 \times 2 \times 40 = 2$ 人, 记为 A, B ; 7 分
 答对题数在 $[4, 6)$ 内的学生有 $0.0375 \times 2 \times 40 = 3$ 人, 记为 c, d, e 8 分
 从答对题数在 $[2, 6)$ 内的学生中随机抽取 2 人的情况有 $(A, B), (A, c), (A, d), (A, e), (B, c), (B, d), (B, e), (c, d), (c, e), (d, e)$, 共 10 种, 10 分
 恰有 1 人答对题数在 $[2, 4)$ 内的情况有 $(A, c), (A, d), (A, e), (B, c), (B, d), (B, e)$, 共 6 种, 11 分
 故所求概率 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 12 分
18. 解: (1) ∵ $c \sin C = \sin A + b \sin B$, ∴ 由正弦定理得 $c^2 = a + b^2$ 1 分
 ∵ $a = 3$, ∴ $b^2 = c^2 - 3$ 2 分
 又 $B = 60^\circ$, ∴ $b^2 = c^2 + 9 - 2 \times 3 \times c \times \frac{1}{2} = c^2 - 3$, 4 分
 ∴ $c = 4$, 5 分
 ∴ $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = 3\sqrt{3}$ 6 分
 (2) 设 D 靠近点 B , 则 $BD = DE = EC = 1$ 7 分
 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, 得 $AD = \sqrt{1^2 + 4^2 - 2 \times 1 \times 4 \times \cos 60^\circ} = \sqrt{13}$ 9 分
 又 $b = \sqrt{c^2 - 3} = \sqrt{13}$, ∴ $AC = AD$ 10 分
 ∵ $DE = EC$, ∴ $AE \perp CD$, 11 分
 故 $\sin \angle DAE = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ 12 分
19. (1) 证明: ∵ $AP \perp$ 平面 PCD , ∴ $AP \perp CD$ 1 分
 ∵ $AD \parallel BC, BC = \frac{1}{2}AD$, ∴ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形, 2 分
 ∴ $BE \parallel CD$,
 ∴ $AP \perp BE$ 3 分
 又 ∵ $AB \perp BC, AB = BC = \frac{1}{2}AD$, 且 E 为 AD 的中点,
 ∴ 四边形 $ABCE$ 为正方形, ∴ $BE \perp AC$ 4 分
 又 $AP \cap AC = A$, ∴ $BE \perp$ 平面 APC , 则 $BE \perp PO$ 5 分
 ∵ $AP \perp$ 平面 PCD , ∴ $AP \perp PC$, 又 $AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}AP$,

∴△PAC 为等腰直角三角形, O 为斜边 AC 上的中点, 6 分

∴PO⊥AC 且 AC∩BE=O, ∴PO⊥平面 ABCD. 7 分

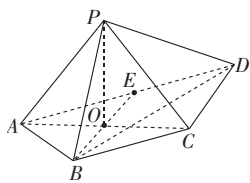
(2)解: ∵OB=1, ∴PA=PB=AB=√2. 8 分

设 C 到平面 PAB 的距离为 d,

由 V_{C-PAB}=V_{P-ABC}, 9 分

得 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 \times d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times 1$, 10 分

解得 $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 12 分



20. (1)解: $f'(x) = 3x^2 - 2ax = x(3x - 2a)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2a}{3}$.

当 $a = 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增, $f(x)$ 无极值, 不合题意; 1 分

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = \frac{2a}{3}$ 处取得极小值, 在 $x = 0$ 处取得极大值, 2 分

则 $a - 1 < 0 < a + 3$, 又 $a > 0$, 所以 $0 < a < 1$; 3 分

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = \frac{2a}{3}$ 处取得极大值, 在 $x = 0$ 处取得极小值, 4 分

则 $a - 1 < \frac{2a}{3} < a + 3$, 又 $a < 0$, 所以 $-9 < a < 0$ 5 分

综上, a 的取值范围为 $(-9, 0) \cup (0, 1)$ 6 分

(2)证明: 由题意得 $f(0) = 0$, 或 $f(\frac{2a}{3}) = 0$, 即 $\frac{4}{27} = 0$ (不成立), 或 $-\frac{4}{27}a^3 + \frac{4}{27} = 0$, 7 分

解得 $a = 1$ 8 分

设函数 $g(x) = f(x) - (x - \frac{23}{27}) = x^3 - x^2 - x + 1$, $g'(x) = (3x + 1)(x - 1)$,

当 $-1 \leq x < -\frac{1}{3}$ 或 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $-\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$ 9 分

所以 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 且极小值为 $g(1) = 0$ 10 分

又 $g(-1) = 0$, 所以当 $x \geq -1$ 时, $g(x) \geq 0$, 11 分

故当 $x \geq -1$ 时, $f(x) \geq x - \frac{23}{27}$ 12 分

21. (1)证明: ∵椭圆 C 经过点 $(1, \frac{3}{2})$, ∴ $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$, 1 分

∴ $a^2 + 9b^2 = (\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2})(a^2 + 9b^2) = \frac{85}{4} + \frac{9b^2}{a^2} + \frac{9a^2}{4b^2} \geq \frac{85}{4} + 2\sqrt{\frac{9b^2}{a^2} \cdot \frac{9a^2}{4b^2}} = \frac{121}{4}$, 2 分

当且仅当 $\frac{9b^2}{a^2} = \frac{9a^2}{4b^2}$, 即 $a^2 = 2b^2$ 时, 等号成立, 3 分

此时椭圆 C 的离心率 $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 4 分

(2)解: ∵椭圆 C 的焦距为 2, ∴ $a^2 - b^2 = 1$, 又 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$, ∴ $a^2 = 4, b^2 = 3$ 5 分

当直线 MN 的斜率不存在时, 由对称性, 设 $M(x_0, x_0), N(x_0, -x_0)$.

∵M, N 在椭圆 C 上, ∴ $\frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{3} = 1$, ∴ $x_0^2 = \frac{12}{7}$, ∴O 到直线 MN 的距离 $d = |x_0| = \sqrt{\frac{12}{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ 6 分

当直线 MN 的斜率存在时, 设 MN 的方程为 $y = kx + m$.

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$, 7 分

$\Delta = (8km)^2 - 4(3 + 4k^2)(4m^2 - 12) > 0$.

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2-12}{3+4k^2}$ 8 分

$\because OM \perp ON, \therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$

$\therefore x_1 x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (k^2 + 1)x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0,$ 9 分

$\therefore (k^2 + 1) \cdot \frac{4m^2-12}{3+4k^2} - \frac{8k^2 m^2}{3+4k^2} + m^2 = 0,$ 即 $7m^2 = 12(k^2 + 1),$ 10 分

$\therefore O$ 到直线 MN 的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{\frac{12}{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$ 11 分

综上, O 到直线 MN 的距离为定值, 且定值为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$, 故存在定圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{12}{7}$, 使得圆 O 与直线 MN 总相切. 12 分

22. 解: (1) l 的直角坐标方程为 $y = 2(x+2)$, 即 $2x - y + 4 = 0,$ 1 分

则 l 的极坐标方程为 $2\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + 4 = 0.$ 3 分

曲线 C 的普通方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 4.$ 5 分

(2) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, α 为 l 的倾斜角), 7 分

代入曲线 C 的普通方程, 得 $t^2 - 2t \cos \alpha - 3 = 0.$ 8 分

设 M, N 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = t_1 t_2 = -3.$ 10 分

23. (1) 解: $f(x) = \begin{cases} -4x, & x \leq -\frac{1}{2}, \\ 2, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 4x, & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$ 3 分

由 $f(x) < 4$, 解得 $-1 < x < 1,$ 4 分

故 $M = \{x | -1 < x < 1\}.$ 5 分

(2) 证明: 因为 $a, b \in M$, 所以 $|a| < 1, |b| < 1,$ 7 分

所以 $|ab| - (|a| + |b|) + 1 = (|a| - 1)(|b| - 1) > 0,$ 9 分

所以 $|ab| - |a| - |b| + 1 > 0.$ 10 分