

2019~2020 年度河南省高三上学期期末考试 数学(文科)

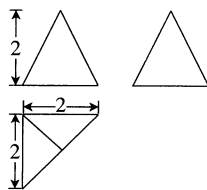
考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分. 考试时间 120 分钟.
2. 请将各题答案填写在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容.

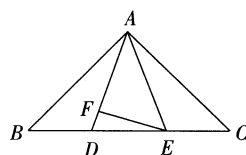
第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{x | 2^x > 4\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{6\}$ B. $\{3, 6\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{2, 3, 6\}$
2. 若等差数列的前两项分别为 1, 3, 则该数列的前 10 项和为
A. 81 B. 90 C. 100 D. 121
3. 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 定义 $\boxed{z} = b + ai$. 若 $\frac{\boxed{z}}{1+i} = \frac{i}{2-i}$, 则 $z =$
A. $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ B. $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$
C. $-\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ D. $-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$
4. 书架上有两套我国四大名著, 现从中取出两本. 设事件 M 表示“两本都是《红楼梦》”; 事件 N 表示“一本是《西游记》, 一本是《水浒传》”; 事件 P 表示“取出的两本中至少有一本《红楼梦》”. 下列结论正确的是
A. M 与 P 是互斥事件 B. M 与 N 是互斥事件
C. N 与 P 是对立事件 D. M, N, P 两两互斥
5. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1$ 的一条渐近线方程为 $3x + 2y = 0$, 则 $m =$
A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
6. 已知底面是等腰直角三角形的三棱锥 $P-ABC$ 的三视图如图所示, 俯视图中的两个小三角形全等, 则
A. PA, PB, PC 两两垂直
B. 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{8}{3}$
C. $|PA| = |PB| = |PC| = \sqrt{6}$
D. 三棱锥 $P-ABC$ 的侧面积为 $3\sqrt{5}$

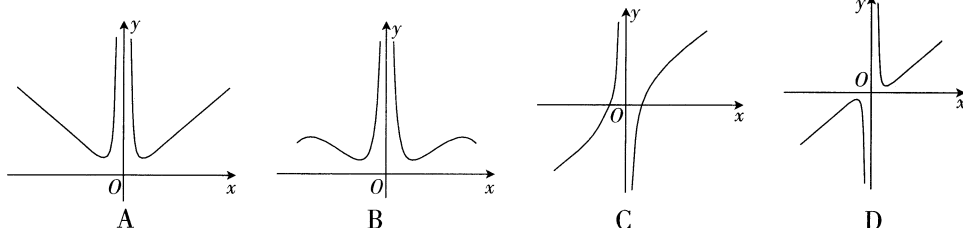


7. 如图,在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, D,E 分别为斜边 BC 的三等分点(D 靠近点 B),过 E 作 AD 的垂线,垂足为 F ,则 $\overrightarrow{AF} =$



- A. $\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
C. $\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{8}{15}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{8}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$

8. 函数 $f(x) = |x| - \frac{\ln|x|}{x^2}$ 的图象大致为



9. 设不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 0, \\ x-\sqrt{3}y \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω , 若从圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 的内部随机选取一点 P , 则 P 取自 Ω 的概率为

- A. $\frac{5}{24}$ B. $\frac{7}{24}$ C. $\frac{11}{24}$ D. $\frac{17}{24}$

10. 张衡是中国东汉时期伟大的天文学家、数学家,他曾经得出圆周率的平方除以十六等于八分之五. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的每个顶点都在球 O 的球面上, $AB \perp$ 底面 BCD , $BC \perp CD$, 且 $AB = CD = \sqrt{3}$, $BC = 2$, 利用张衡的结论可得球 O 的表面积为

- A. 30 B. $10\sqrt{10}$ C. 33 D. $12\sqrt{10}$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4^x + 3, & x \leq 0, \\ 2^x + \log_9 x^2 - 9, & x > 0, \end{cases}$ 则函数 $y = f(f(x))$ 的零点所在区间为

- A. $(3, \frac{7}{2})$ B. $(-1, 0)$ C. $(\frac{7}{2}, 4)$ D. $(4, 5)$

12. 已知直线 $y = k(x-1)$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 直线 $y = 2k(x-2)$ 与抛物线 $D: y^2 = 8x$ 交于 M, N 两点, 设 $\lambda = |AB| - 2|MN|$, 则

- A. $\lambda < -16$ B. $\lambda = -16$ C. $-12 < \lambda < 0$ D. $\lambda = -12$

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 函数 $f(x) = 9x^2 + \sqrt{x-1}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 函数 $f(x) = |\sin 4x|$ 的图象的对称轴方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 BC_1, BD_1 与底面 $ABCD$ 所成角分别为 α, β , 则 $\tan(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n \neq 0$, 曲线 $y = x^3$ 在点 (a_n, a_n^3) 处的切线经过点 $(a_{n+1}, 0)$, 下列四个结论:

- ① $a_2 = \frac{2}{3}$; ② $a_3 = \frac{1}{3}$; ③ $\sum_{i=1}^4 a_i = \frac{65}{27}$; ④ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

其中所有正确结论的编号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

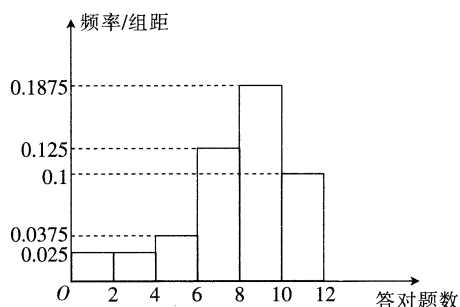
(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

为了解某中学学生对《中华人民共和国交通安全法》的了解情况,调查部门在该校进行了一次问卷调查(共 12 道题),从该校学生中随机抽取 40 人,统计了每人答对的题数,将统计结果分成 $[0, 2)$, $[2, 4)$, $[4, 6)$, $[6, 8)$, $[8, 10)$, $[10, 12]$ 六组,得到如下频率分布直方图.

(1)若答对一题得 10 分,未答对不得分,估计这 40 人的成绩的平均分(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(2)若从答对题数在 $[2, 6)$ 内的学生中随机抽取 2 人,求恰有 1 人答对题数在 $[2, 4)$ 内的概率.



18. (12 分)

a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边. 已知 $a=3, c\sin C=\sin A+b\sin B$, 且 $B=60^\circ$.

(1)求 $\triangle ABC$ 的面积;

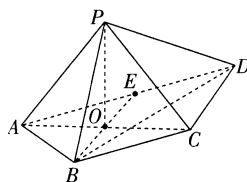
(2)若 D, E 是 BC 边上的三等分点,求 $\sin\angle DAE$.

19. (12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP \perp$ 平面 PCD , $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $AP=AB=BC=\frac{1}{2}AD$, E 为 AD 的中点, AC 与 BE 相交于点 O .

(1)证明: $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

(2)若 $OB=1$,求点 C 到平面 PAB 的距离.



20. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + \frac{4}{27}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(a-1, a+3)$ 上存在极大值, 求 a 的取值范围;

(2) 若 x 轴是曲线 $y = f(x)$ 的一条切线, 证明: 当 $x \geq -1$ 时, $f(x) \geq x - \frac{23}{27}$.

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{3}{2})$, 过坐标原点 O 作两条互相垂直的射线与椭圆 C 分别交于 M, N 两点.

(1) 证明: 当 $a^2 + 9b^2$ 取得最小值时, 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 若椭圆 C 的焦距为 2, 是否存在定圆与直线 MN 总相切? 若存在, 求定圆的方程; 若不存在, 请说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生从第 22, 23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos \varphi, \\ y = 2\sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数). 以坐标原点为

极点, x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系. 已知点 P 的直角坐标为 $(-2, 0)$, 过 P 的直线 l 与曲线 C 相交于 M, N 两点.

(1) 若 l 的斜率为 2, 求 l 的极坐标方程和曲线 C 的普通方程;

(2) 求 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |2x-1| + |2x+1|$, 记不等式 $f(x) < 4$ 的解集为 M .

(1) 求 M ;

(2) 设 $a, b \in M$, 证明: $|ab| - |a| - |b| + 1 > 0$.