

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学乙卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $2(z+\bar{z})+3(z-\bar{z})=4+6i$, 则 $z=(\quad)$.
A. $1-2i$
B. $1+2i$
C. $1+i$
D. $1-i$
2. 已知集合 $S=\{s|s=2n+1, n\in\mathbb{Z}\}$, $T=\{t|t=4n+1, n\in\mathbb{Z}\}$, 则 $S\cap T=(\quad)$
A. $\emptyset$
B. S
C. T
D. $\mathbb{Z}$
3. 已知命题 $p: \exists x\in\mathbb{R}, \sin x < 1$; 命题 $q: \forall x\in\mathbb{R}, e^{|x|} \geq 1$, 则下列命题中为真命题的是 $(\quad)$
A. $p\wedge q$
B. $\neg p\wedge q$
C. $p\wedge \neg q$
D. $\neg(p\vee q)$
4. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 $(\quad)$
A. $f(x-1)-1$
B. $f(x-1)+1$
C. $f(x+1)-1$

D. $f(x+1)+1$

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 ()

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 则不同的分配方案共有 ()

A. 60 种

B. 120 种

C. 240 种

D. 480 种

7. 把函数 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的图像, 则 $f(x)=$ ()

A. $\sin(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{12})$

B. $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12})$

C. $\sin(2x-\frac{7\pi}{12})$

D. $\sin(2x+\frac{\pi}{12})$

8. 在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 中各随机取 1 个数, 则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为 ()

A. $\frac{7}{4}$

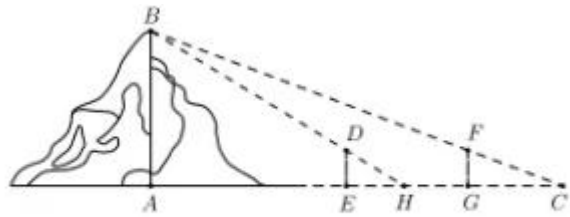
B. $\frac{23}{32}$

C. $\frac{9}{32}$

D. $\frac{2}{9}$

9. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量

海盗的高。如图，点 E, H, G 在水平线 AC 上，DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG 称为“表距”，GC 和 EH 都称为“表目距”，GC 与 EH 的差称为“表目距的差”。则海岛的高 AB= ()。



(第 9 题图)

- A: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$
 B: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
 C: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$
 D: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

10. 设 $a \neq 0$ ，若 $x=a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则 ()。

- A: $a < b$
 B: $a > b$
 C: $ab < a^2$
 D: $ab > a^2$

11. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上顶点，若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB| \leq 2b$ ，则 C 的离心率的取值范围是 ()。

- A: $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$
 B: $[\frac{1}{2}, 1)$
 C: $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$
 D: $(0, \frac{1}{2}]$

12. 设 $a = 2 \ln 1.01$ ， $b = \ln 1.02$ ， $c = \sqrt{1.04} - 1$ ，则 ()。

- A: $a < b < c$
 B: $b < c < a$
 C: $b < a < c$

D: $c < a < b$

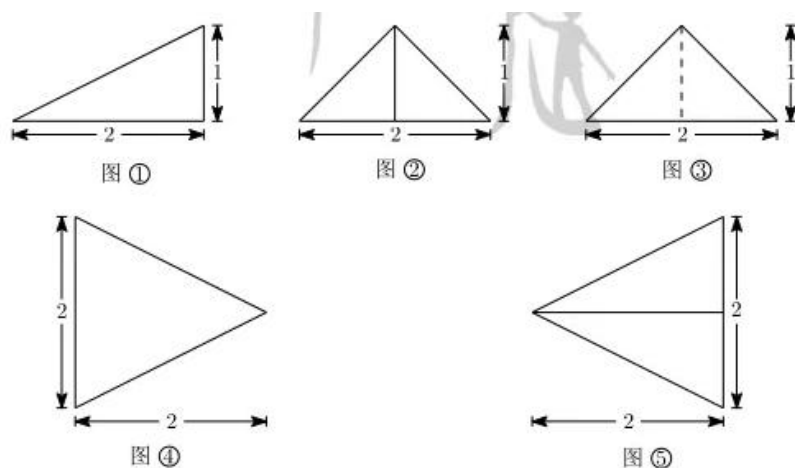
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1$ ($m > 0$) 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$ ，则 C 的焦距为_____.

14. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 4)$ ，若 $(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$ ，则 $\lambda =$ _____.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$ ， $a^2 + c^2 = 3ac$ ，则 $b =$ _____.

16. 以图①为正视图和俯视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某个三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____（写出符合要求的一组答案即可）.



(第 16 题图)

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某厂研究了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

备										
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

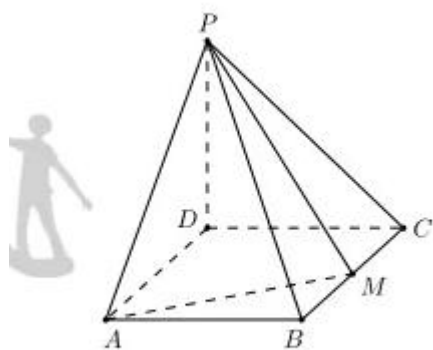
旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$,样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2

- (1) 求 $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_1^2 , s_2^2 ;
- (2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高(如果 $\bar{y}-\bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{2}}$,则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高,否则不认为有显著提高).

18. (12 分)

如图,四棱锥 P-ABCD 的底面是矩形,PD⊥底面 ABCD,PD=DC=1, M 为 BC 的中点,且 PB⊥AM,

- (1) 求 BC;
- (2) 求二面角 A-PM-B 的正弦值。



(第 18 题图)

19. (12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和,已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.

- (1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;
- (2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. (12 分)

设函数 $f(x) = \ln(a-x)$, 已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点。

(1) 求 a ;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$, 证明: $g(x) < 1$.

21. (12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 且 F 与圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p ;

(2) 若点 P 在 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2, 1)$, 半径为 1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程; 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 过点 $F(4, 1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条直线的极坐标方程.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+3|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \geq -a$, 求 a 的取值范围.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学乙卷（参考答案）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回

1-5 CCABD

6-10 CBBAD

11-12 CB

13. 4

14. $\frac{3}{5}$

15. $2\sqrt{2}$

16. ②⑤或③④

17. 解：（1）各项所求值如下所示

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(9.8+10.3+10.0+10.2+9.9+9.8+10.0+10.1+10.2+9.7) = 10.0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}(10.1+10.4+10.1+10.0+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5) = 10.3$$

$$s_1^2 = \frac{1}{10} \times [(9.7-10.0)^2 + 2 \times (9.8-10.0)^2 + (9.9-10.0)^2 + 2 \times (10.0-10.0)^2 + (10.1-10.0)^2 + 2 \times (10.2-10.0)^2 + (10.3-10.0)^2] = 0.36,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{10} \times [(10.0-10.3)^2 + 3 \times (10.1-10.3)^2 + (10.3-10.3)^2 + 2 \times (10.4-10.3)^2 + 2 \times (10.5-10.3)^2 + (10.6-10.3)^2] = 0.4.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 中数据得 } \bar{y} - \bar{x} = 0.3, 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}} \approx 0.34$$

显然 $\bar{y} - \bar{x} < 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$ ，所以不认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高。

18. 解：（1）因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且矩形 $ABCD$ 中， $AD \perp DC$ ，所以以 $\overrightarrow{DA}$ ， $\overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{DP}$ 分别为 x ， y ， z 轴正方向， D 为原点建立空间直角坐标系 $D-xyz$ 。

设 $BC=t$ ， $A(t, 0, 0)$ ， $B(t, 1, 0)$ ， $M(\frac{t}{2}, 1, 0)$ ， $P(0, 0, 1)$ ，所以 $\overrightarrow{PB} = (t, 1, -1)$ ， $\overrightarrow{AM} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$ ，

因为 $PB \perp AM$ ，所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{t^2}{2} + 1 = 0$ ，所以 $t = \sqrt{2}$ ，所以 $BC = \sqrt{2}$ 。

（2）设平面 APM 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ ，由于 $\overrightarrow{AP} = (-\sqrt{2}, 0, 1)$ ，则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = -\sqrt{2}x + z = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + y = 0 \end{cases}$$

令 $x=\sqrt{2}$, 得 $\mathbf{m}=(\sqrt{2}, 1, 2)$ 。

设平面 PMB 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(x^t, y^t, z^t)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{2}x^t = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = \sqrt{2}x^t + y^t - z^t = 0 \end{cases}$$

令 $y^t=1$, 得 $\mathbf{n}=(0, 1, 1)$ 。

所以 $\cos(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}||\mathbf{n}|} = \frac{3}{\sqrt{7} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$, 所以二面角 A-PM-B 的正弦值为 $\frac{\sqrt{70}}{14}$ 。

19. (1) 由已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$, 则 $\frac{b_n}{b_{n+1}} = S_n (n \geq 2)$

$$\Rightarrow \frac{2b_{n-1} + 1}{b_n} = 2 \Rightarrow 2b_{n-1} + 2 = 2b_n \Rightarrow b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2} (n \geq 2), b_1 = \frac{3}{2}$$

故 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列。

(2) 由 (1) 知 $b_n = \frac{3}{2} + (n-1) \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2}$, 则 $\frac{2}{S_n} + \frac{2}{n+2} = 2 \Rightarrow S_n = \frac{n+2}{n+1}$

$$n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ -\frac{1}{n(n+1)}, n \geq 2 \end{cases}$$

20. (1) $[xf(x)]' = x' f(x) + xf'(x)$

当 $x=0$ 时, $[xf(x)]' = f(0) = \ln a = 0$, 所以 $a=1$

(2) 由 $f(x) = \ln(1-x)$, 得 $x < 1$

当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \ln(1-x) < 0$, $xf(x) < 0$; 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \ln(1-x) > 0$, $xf(x) < 0$

故即证 $x+f(x) > xf(x)$, $x+\ln(1-x)-x\ln(1-x) > 0$

令 $1-x=t$ ($t > 0$ 且 $t \neq 1$), $x=1-t$, 即证 $1-t+\ln t - (1-t)\ln t > 0$

令 $f(t) = 1-t+\ln t - (1-t)\ln t$, 则

$$f'(t) = -1 - \frac{1}{t} - [(-1)\ln t + \frac{1-t}{t}] = -1 + \frac{1}{t} + \ln t - \frac{1-t}{t} = \ln t$$

所以 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(t) > f(1) = 0$, 得证。

21. 解: (1) 焦点 $F(0, \frac{p}{2})$ 到 $x^2 + (y+4)^2 = 1$ 的最短距离为 $\frac{p}{2} + 3 = 4$, 所以 $p=2$ 。

(2) 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_0, y_0)$, 则

$$l_{PA} = y = \frac{1}{2}x_1(x - x_1) + y_1 = \frac{1}{2}x_1X - \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1x - y_1,$$

$$l_{PB}: y = \frac{1}{2}x_2x - y_2, \text{ 且 } x_0^2 = -y_0^2 - 8y_0 - 15.$$

$$l_{PA}, l_{PB} \text{ 都过点 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } \begin{cases} y_0 = \frac{1}{2}x_1x_0 - y_1, \\ y_0 = \frac{1}{2}x_2x_0 - y_2, \end{cases} \text{ 故 } l_{AB}: y_0 = \frac{1}{2}x_0x - y, \text{ 即 } y = \frac{1}{2}x_0x - y_0.$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x_0x - y_0, \\ x^2 = 4y \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 2x_0x + 4y_0 = 0, \Delta = 4x_0^2 - 16y_0.$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1 + \frac{x_0^2}{4}} \cdot \sqrt{4x_0^2 - 16y_0} = \sqrt{4 + x_0^2} \cdot \sqrt{x_0^2 - 4y_0}, \quad d_{P \rightarrow AB} = \frac{|x_0^2 - 4y_0|}{\sqrt{x_0^2 + 4}}, \text{ 所以}$$

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d_{P \rightarrow AB} = \frac{1}{2}|x_0^2 - 4y_0| \cdot \sqrt{x_0^2 - 4y_0} = \frac{1}{2}(x_0^2 - 4y_0)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(-y_0^2 - 12y_0 - 15)^{\frac{3}{2}}.$$

而 $y_0 \in [-5, -3]$. 故当 $y_0 = -5$ 时, $S_{\triangle PAB}$ 达到最大, 最大值为 $20\sqrt{5}$.

22. (1) 因为 $\odot C$ 的圆心为 $(2, 1)$, 半径为 1. 故 $\odot C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos\theta \\ y = 1 + \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数).

(2) 设切线 $y = k(x - 4) + 1$, 即 $kx - y - 4k + 1 = 0$. 故

$$\frac{|2k - 1 - 4k + 1|}{\sqrt{1 + k^2}} = 1$$

即 $|2k| = \sqrt{1 + k^2}$, $4k^2 = 1 + k^2$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故直线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 4) + 1$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 4) + 1$

故两条切线的极坐标方程为 $\rho \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta - \frac{4}{3}\sqrt{3} + 1$ 或 $\rho \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta + \frac{4}{3}\sqrt{3} + 1$.

23. 解: (1) $a = 1$ 时, $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$, 即求 $|x - 1| + |x + 3| \geq 6$ 的解集.

当 $x \geq 1$ 时, $2x + 2 \geq 6$, 得 $x \geq 2$;

当 $-3 < x < 1$ 时, $4 \geq 6$ 此时没有 x 满足条件;

当 $x \leq -3$ 时 $-2x - 2 \geq 6$. 得 $x \leq -4$,

综上, 解集为 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.

(2) $f(x)$ 最小值 $> -a$, 而由绝对值的几何意义, 即求 x 到 a 和 -3 距离的最小值.

当 x 在 a 和 -3 之间时最小, 此时 $f(x)$ 最小值为 $|a + 3|$, 即 $|a + 3| > -a$.

$A \geq -3$ 时, $2a + 3 > 0$, 得 $a > -\frac{3}{2}$; $a < -3$ 时, $-a - 3 > -a$, 此时 a 不存在.

综上, $a > -\frac{3}{2}$.