

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，总共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $M=\{1,2\}$, $N=\{3,4\}$, 则 $C_U(M \cup N) =$

- A. $\{5\}$
- B. $\{1,2\}$
- C. $\{3,4\}$
- D. $\{1,2,3,4\}$

2. 设 $iz=4+3i$, 则 z 等于

- A. $-3-4i$
- B. $-3+4i$
- C. $3-4i$
- D. $3+4i$

3. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, \sin x < 1$, 命题 $q: \forall x \in \mathbb{R}, e^{|x|} \geq 1$, 则下列命题中为真命题的是

- A. $p \wedge q$
- B. $\neg p \wedge q$
- C. $p \wedge \neg q$
- D. $\neg(p \vee q)$

4. 函数 $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}$ 的最小正周期和最大值分别是

- A. 3π 和 $\sqrt{2}$
- B. 3π 和 2
- C. 6π 和 $\sqrt{2}$
- D. 6π 和 2

5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 4 \\ x-y \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$, 则 $z=3x+y$ 的最小值为

- A.18
- B.10
- C.6
- D.4

6. $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} =$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 随机取 1 个数，则取到的数小于 $\frac{1}{3}$ 的概率为

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

8. 下列函数中最小值为 4 的是

A. $y = x^2 + 2x + 4$

B. $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$

C. $y = 2^x + 2^{2-x}$

D. $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

9. 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ，则下列函数中为奇函数的是

A. $f(x-1) - 1$

B. $f(x-1) + 1$

C. $f(x+1) - 1$

D. $f(x+1) + 1$

10.在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, P 为 B_1D_1 的重点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为

- A. $\frac{\pi}{2}$
- B. $\frac{\pi}{3}$
- C. $\frac{\pi}{4}$
- D. $\frac{\pi}{6}$

11.设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的上顶点, 点 P 在 C 上, 则 $|PB|$ 的最大值为

- A. $\frac{5}{2}$
- B. $\sqrt{6}$
- C. $\sqrt{5}$
- D. 2

12.设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x - a)^2(x - b)$ 的极大值点, 则

- A. $a < b$
- B. $a > b$
- C. $ab < a^2$
- D. $ab > a^2$

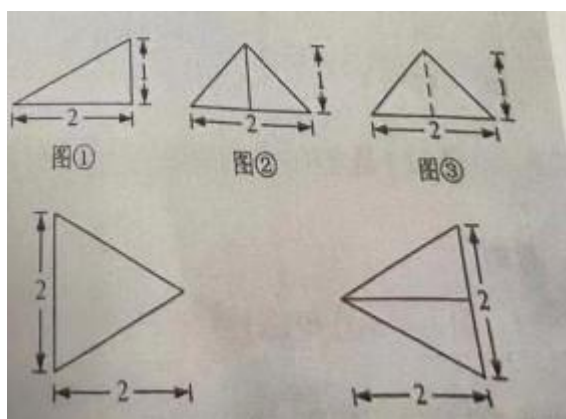
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13.已知向量 $a = (2, 5)$, $b = (\lambda, 4)$, 若 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $\lambda =$ _____.

14.双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点到直线 $x + 2y - 8 = 0$ 的距离为_____.

15.记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b =$ _____.

16.以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____ (写出符合要求的一组答案即可)。



三、解答题

(一) 必考题

17. (12 分)

某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$, 样本方差分别记为 S_1^2 和 S_2^2 .

(1) 求 $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_1^2 , S_2^2

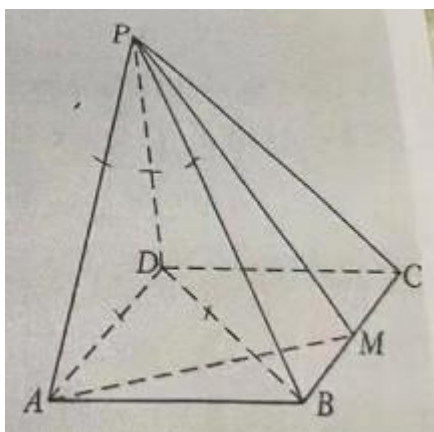
(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高(如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. (12 分)

如图, 四棱锥 P-ABCD 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 ABCD, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$.

(1) 证明: 平面 PAM $\perp$ 平面 PBD;

(2) 若 $PD = DC = 1$, 求四棱锥 P-ADCD 的体积.



19.(12 分)

设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{na_n}{3}$, 已知 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.证明: $T_n < \frac{S_n}{2}$.

20. (12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2.

(1) 求 C 的方程.

(2) 已知 O 为坐标原点, 点 P 在 C 上, 点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF}$, 求直线 OQ 斜率的最大值.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22.[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$, 半径为 1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程。

(2) 过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条切线的极坐标方程。

23.[选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x - a| + |x + 3|$.

(1) 当 $a = 1$ 时，求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集；

(2) 若 $f(x) > -a$ ，求 a 的取值范围.